

Schalenmodellrechnungen beim Kern O¹⁸ mit geschwindigkeitsabhängigen Zwei-Teilchen-Potentialen *

HANS GROTE

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforsch. 22 a, 415—421 [1967]; eingegangen am 18. Januar 1967)

The energies of the low lying levels and the absolute position of the ground state of the nucleus O¹⁸ are calculated using five velocity-dependent potentials. The calculation is based on the shell model with two outer neutrons in the potential of the O¹⁶ core. The interaction potential as well as the core potential are fitted to experimental data, leaving no free parameters in the final result.

The wave functions of the harmonic oscillator are used in each case of the five velocity-dependent potentials. An additional computation is carried out using one of these potentials and taking into account the perturbation of the wave functions. It turns out that, for satisfactory application of the velocity-dependent potentials in shell model calculations, this perturbation should be considered.

Auf der Kingston-Konferenz im Jahre 1960 wurde zum ersten Male die Verwendung geschwindigkeitsabhängiger Zwei-Teilchen-Potentiale in der Kernphysik diskutiert. Vorher waren als realistische Potentiale in kernphysikalischen Rechnungen fast ausschließlich die *hard core*-Potentiale benutzt worden, die die Daten der Proton-Proton-Streuung bis hinauf zu Laborenergien von 300 MeV quantitativ wiedergeben. Der mathematische Aufwand bei ihrer Anwendung machte es jedoch wünschenswert, sie durch Potentiale zu ersetzen, bei denen die Verwendung der einfachen Störungsrechnung mit ungestörten Wellenfunktionen möglich war.

Die Berechnung des Energiespektrums eines endlichen Kerns mit Hilfe eines Zwei-Teilchen-Potentials wird besonders einfach und übersichtlich, wenn man das Verhalten des Kerns in den niedrig angeregten Zuständen in guter Näherung durch das Modell zweier Nukleonen in einem von den übrigen Teilchen hervorgerufenen Rumpfpotential beschreiben kann. Das zu untersuchende Zwei-Teilchen-Potential wird dann als Wechselwirkungspotential zwischen diesen beiden Nukleonen eingeführt.

Für solche Rechnungen schienen bisher die Kerne mit doppelt magischer Teilchenzahl als Rumpfkerne besonders geeignet, da wegen der abgeschlossenen Schalen angenommen wurde, daß beim Vorhandensein zweier äußerer Nukleonen eine Anregung von Rumpfteilchen erst bei höheren Energien erfolgt. Nach einer Arbeit von ENGELAND¹ hat dieses einfache

Schalenmodell beim Kern O¹⁸ aber nur eine eingeschränkte Berechtigung.

In der vorliegenden Arbeit wird jedoch noch dieses Modell zugrunde gelegt. Der Vergleich der damit gewonnenen Ergebnisse mit dem Experiment ist daher nur bedingt möglich. Er tritt zurück hinter dem Vergleich mit Ergebnissen anderer Autoren, die beim Kern O¹⁸ dasselbe Modell, aber ein *hard core*-Potential für die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung benutztten.

1. Angepaßte Zwei-Teilchen-Potentiale

In Abb. 1 sind die Singulett-S- und D-Streuphasen der Proton-Proton-Streuung eingezeichnet². Bisher sind in theoretischen Arbeiten vor allem zwei Arten von Potentialen verwendet worden, die dieses Verhalten wiedergeben: die *hard core*-Potentiale und die geschwindigkeitsabhängigen Potentiale. Als typischer Vertreter der ersten Art kann das Potential von GAMMEL und THALER³ gelten, mit dem unter anderem eine Berechnung der Energieniveaus des Kerns O¹⁸ von DAWSON, TALMI und WALECKA⁴ sowie von ENGELAND und KALLIO⁵ durchgeführt wurde. Der Singulett-Anteil gerader Parität hat dabei außerhalb des *hard core*-Radius $D = 0,4$ fm YUKAWA-Form.

In der vorliegenden Arbeit werden fünf geschwindigkeitsabhängige Potentiale verwendet, die von den folgenden Autoren an die Streudaten angepaßt wurden: RAZAVY et al.⁶ (Potentiale 1 und 2), GREEN⁷

* D 7.

¹ T. ENGELAND, Nucl. Phys. **72**, 68 [1965].

² G. BREIT, M. H. HULL JR., K. E. LASSILA u. K. D. PYATT, Phys. Rev. **120**, 2227 [1960].

³ J. L. GAMMEL u. R. M. THALER, Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics **5**, 99 [1960].

⁴ J. F. DAWSON, I. TALMI u. J. D. WALECKA, Ann. Phys. **18**, 339 [1962] (im folgenden als DTW zitiert).

⁵ T. ENGELAND u. A. KALLIO, Nucl. Phys. **59**, 211 [1964].

⁶ M. RAZAVY, G. FIELD u. J. S. LEVINGER, Phys. Rev. **125**, 169 [1962].

⁷ A. M. GREEN, Nucl. Phys. **33**, 218 [1962].



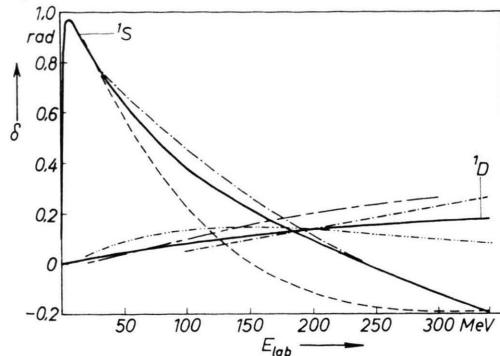


Abb. 1. Singulett-S. und -D-Streuphasen. Ausgezogen: exp., - - - Pot. 1., - - - - Pot. 2, - - - - - Pot. 4., - - - - hard core (die S-Phasen für hard core, Pot. 4 und Pot. 5 fallen mit der ausgezogenen Kurve zusammen).

(Potential 3), Rojo und SIMMONS⁸ (Potential 4) und HERNDON et al.⁹ (Potential 5). Die Singulett-Anteile gerader Parität bestehen dabei jeweils aus zwei Termen:

$$V = V_c(r) + \frac{1}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}).$$

Dabei hat f entweder die Gestalt

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} V_p(r) \mathbf{p} \quad (\text{Potentiale 1 und 2})$$

oder

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 V_p(r) + V_p(r) \mathbf{p}^2 \quad (\text{Potentiale 3, 4 und 5}).$$

Die Streudaten, die sich aus diesen Potentialen ergeben, sind in Abb. 1 eingetragen, soweit sie von den Autoren in Form von Tabellen angegeben wurden.

Das Potential 1 ist das einfachste mit einem rechteckigförmigen Orts- und Geschwindigkeitsanteil gleicher Reichweite. Die Wiedergabe der S-Streuphase ist nicht sehr gut, an die D-Phase wurde das Potential nicht angepaßt. Das Potential 2 gibt auch diese Streuphase richtig wieder und ist dementsprechend komplizierter aufgebaut: zu einem Kastenpotential kommt beim ortsabhängigen Term noch ein auslaufender YUKAWA-Anteil, V_p ist ein Kastenpotential geringerer Reichweite mit einem zusätzlichen δ -Anteil. Der Singulett-Anteil des Potentials 3 ist im wesentlichen aus einem GAUSS- und einem YUKAWA-Anteil zusammengesetzt. Das Potential 4 besteht aus zwei abfallenden Exponentialfunktionen verschiedener Reichweite, während die entsprechenden Terme des Potentials 5 beide GAUSS-förmig sind.

Aus dieser Aufstellung erkennt man, daß die Potentiale sowohl der Form wie auch der Reichweite nach stark voneinander abweichen. Sie bilden in gewisser Weise eine repräsentative Auswahl der bisher in der Literatur verwendeten geschwindigkeitsabhängigen Zwei-Teildchen-Potentiale.

Neben den oben angeführten Singulett-Anteilen enthalten das Potential 3 und das *hard core*-Potential noch Triplet-Anteile negativer Parität mit Spin-Bahn- und Tensor-Kopplungstermen, die im wesentlichen abstoßend wirken. Allerdings sind die davon herrührenden Beiträge der Matrixelemente nicht sehr groß im Vergleich mit den Singulett-Anteilen, so daß man annehmen darf, daß auch die reinen Singulett-Potentiale 1, 2, 4 und 5 zur Berechnung des Kern-Termschemas herangezogen werden dürfen.

Singulett-Anteile negativer Parität und Triplet-Anteile positiver Parität können im vorliegenden Fall keine Beiträge liefern.

2. Schalenmodell bei O¹⁷ und O¹⁸

Die Wahl des Kerns O¹⁸ zur Berechnung eines Termschemas hat folgende Gründe: Der Kern O¹⁶ ist nach dem Schalenmodell doppelt magisch mit je acht Protonen und Neutronen in den beiden unteren Oszillatorschalen. Durch Hinzufügen von ein oder zwei Neutronen erhält man dann die Kerne O¹⁷ und O¹⁸. Die zusätzlichen Teilchen befinden sich im

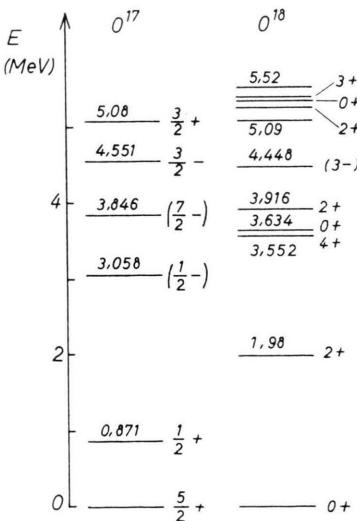


Abb. 2. Experimentelles Termschema der Kerne O¹⁷ und O¹⁸.

⁸ O. Rojo u. L. M. SIMMONS, Phys. Rev. **125**, 273 [1962].

⁹ R. C. HERNDON, E. W. SCHMID u. Y. C. TANG, Nucl. Phys. **42**, 113 [1963].

Grundzustand in der (sd)-Schale, die aus den Ein-Teilchen-Zuständen $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ und $1d_{3/2}$ gebildet wird. Der untere Teil des experimentellen Termschemas dieser beiden Kerne ist in Abb. 2 aufgetragen. Diese Werte wurden den Nuclear Data Sheets und einer Arbeit von ENGELAND¹ entnommen.

Es wird nun vorausgesetzt, daß die Wirkung der sechzehn Nukleonen des Rumpfkernes O¹⁶ auf das eine äußere Neutron im Kern O¹⁷ und auf die beiden äußeren Neutronen im Kern O¹⁸ durch ein in beiden Fällen gleiches Rumpfpotential ersetzt werden kann. Bei den Zuständen gerader Parität in Abb. 2 handelt es sich dann um Ein- und Zwei-Teilchen-Zustände zu diesem Rumpfpotential, wobei die Zustände des Kerns O¹⁸ durch die Wechselwirkung zwischen den beiden äußeren Neutronen mitbestimmt werden. Die Berechnung der Matrixelemente wird dabei sehr vereinfacht, wenn man als Ein-Teilchen-Wellenfunktionen die des dreidimensionalen harmonischen Oszillators wählt. Nach Messungen der Teilchendichte bei leichten Kernen scheint diese Annahme erlaubt zu sein, solange man sich auf den Bereich der niedrig angeregten Zustände beschränkt.

GOLDHAMMER¹⁰ verwendete Messungen mit gestreuten Elektronen zur Bestimmung der Ladungsverteilung in leichten Kernen. Unter der Annahme, daß es sich beim Potential des Kerns O¹⁶ um das eines harmonischen Oszillators handelt, berechnete er aus diesen Messungen die Größe $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$ zu $a = 1,71$ fm. Dieser Wert wird im folgenden verwendet.

Mit dem Ein-Teilchen-HAMILTON-Operator H_0 und dem Potential der Wechselwirkung V wird der Zwei-Teilchen-HAMILTON-Operator für die beiden äußeren Neutronen beim Kern O¹⁸:

$$H = H_{01} + H_{02} + V = H^0 + V, \quad (1)$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf die beiden Teilchen beziehen.

Zur Berechnung der Energieniveaus ist es erforderlich, die Matrixelemente von H zu den Eigenzuständen von H^0 zu bestimmen. Die darin nach (1) auftretenden Anteile von H_{01} und H_{02} werden aus dem experimentellen Termschema des Kerns O¹⁷ entnommen, so daß nur die Matrixelemente von V berechnet werden müssen. In die Matrixelemente von H und damit die Energien der niedrig angeregten Zu-

stände des Kerns O¹⁸ gehen somit nicht die Oszillatorennergien ein, sondern es werden nur die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators verwendet.

Unter diesen Voraussetzungen sind bereits Berechnungen des Termschemas des Kerns O¹⁸ vorgenommen worden. MCKELLAR¹¹ verwendet das Potential 3, berücksichtigt aber bei der Rechnung nur die Ein-Teilchen-Zustände $1d_{5/2}$ und $2s_{1/2}$. Dasselbe Potential ist in neuerer Zeit von LEE und BARANGER¹² verwendet worden. Diese Autoren berücksichtigen auch den Zustand $1d_{3/2}$, führen jedoch keine Diagonalisierung der Matrizen aus den Matrixelementen von H durch, sondern berechnen die Energieniveaus der Eigenzustände von H mit Störungsrechnung zweiter Ordnung. Ferner hat der Verfasser dieser Arbeit Rechnungen mit dem Potential 2 veröffentlicht¹³. Dort ist allerdings versehentlich mit einem falschen Wert für λ gerechnet worden ($\lambda = 0,263$ anstatt, wie angegeben, $\lambda = 1,64$), so daß die Ergebnisse nicht für das angegebene Potential zutreffen.

3. Matrixelemente der Wechselwirkung

In Tab. 1 sind die Zwei-Teilchen-Zustände zum jeweiligen Drehimpuls J zusammengestellt, die sich aus den mit dem PAULI-Prinzip verträglichen Kombinationen der Ein-Teilchen-Zustände $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ und $1d_{3/2}$ ergeben. Die Matrixelemente von H zu diesen Zuständen werden in die Matrixelemente von V und in die Anteile von H_{01} und H_{02} zerlegt, wie sie aus (1) folgen. Man erhält

$$\begin{aligned} \langle j_1' j_2' J | H | j_1 j_2 J \rangle = & \langle j_1 | H_{01} | j_1 \rangle_1 \delta_{j_1' j_1} \delta_{j_2' j_2} + \\ & + \langle j_2 | H_{02} | j_2 \rangle_2 \delta_{j_1' j_1} \delta_{j_2' j_2} + \langle j_1' j_2' J | V | j_1 j_2 J \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei j den jeweiligen Ein-Teilchen-Zustand vollständig bezeichnet. Setzt man

$$\varepsilon_0 = \langle 1d_{5/2} | H_{01} | 1d_{5/2} \rangle_1, \quad (3)$$

so erhält man für die beiden anderen Matrixelemente des Ein-Teilchen-HAMILTON-Operators

$$\begin{aligned} \langle 2s_{1/2} | H_{01} | 2s_{1/2} \rangle_1 &= \varepsilon_0 + \delta_1, \\ \langle 1d_{3/2} | H_{01} | 1d_{3/2} \rangle_1 &= \varepsilon_0 + \delta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

mit den Abständen $\delta_1 = 0,871$ MeV und $\delta_2 = 5,08$ MeV zwischen dem $2s_{1/2}$ - und dem $1d_{5/2}$ -Niveau einerseits und dem $1d_{3/2}$ - und dem $1d_{5/2}$ -Niveau des experi-

¹⁰ P. GOLDHAMMER, Rev. Mod. Phys. **35**, 40 [1963].

¹¹ B. MCKELLAR, Phys. Rev. **134** B, 1190 [1964].

¹² C. W. LEE u. E. BARANGER, Nucl. Phys. **79**, 385 [1966].

¹³ H. GROTE, Kurznachr. d. Akademie d. Wissensch. Göttingen Nr. **15** [1965].

mentellen Termschemas des Kerns O^{17} andererseits (Abb. 2). Als Bezugspunkt der Energie wird $\varepsilon_0 = 0$ gewählt, woraus sich die Matrixelemente von H ergeben. Durch Diagonalisierung der Matrizen erhält man die Eigenzustände zu H als Linearkombinationen der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators und gleichzeitig die zugehörigen Energien.

$J = 0:$		
$(1d_{5/2})^2$	$(2s_{1/2})^2$	$(1d_{3/2})^2$
$J = 1:$		
$(1d_{5/2} 1d_{3/2})$	$(1d_{3/2} 2s_{1/2})$	
$J = 2:$		
$(1d_{5/2})^2$	$(1d_{5/2} 2s_{1/2})$	$(1d_{5/2} 1d_{3/2})$
	$(1d_{3/2} 2s_{1/2})$	$(1d_{3/2})^2$
$J = 3:$		
$(1d_{5/2} 2s_{1/2})$	$(1d_{5/2} 1d_{3/2})$	
$J = 4:$		
$(1d_{5/2})^2$	$(1d_{5/2} 1d_{3/2})$	

Tab. 1. Zwei-Teilchen-Zustände aus den Ein-Teilchen-Zuständen $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ und $1d_{3/2}$.

Die Matrixelemente von V werden abgekürzt a_{ik}^J genannt. Es gilt $a_{ik}^J = a_{ik}^J$. Dabei ist J der Drehimpuls, i der Zeilen- und k der Spaltenindex. Sie ergeben sich als Nummern der von links gezählten Plätze der beiden Zustände in Tab. 1, aus denen das Matrixelement gebildet wird. So ist zum Beispiel $a_{23}^2 = \langle 1d_{5/2} 2s_{1/2} 2 | V | 1d_{5/2} 1d_{3/2} 2 \rangle$.

Die Berechnung der a_{ik}^J verläuft folgendermaßen: die Wellenfunktionen zu den Zuständen $|j_1 j_2 J\rangle$ werden nach TALMI¹⁴ in Relativ- und Schwerpunktskoordinaten umgerechnet. Dabei geht entscheidend die hierfür besonders geeignete Form der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators ein. Da V nur von den Relativkoordinaten und -impulsen der beiden wechselwirkenden Teilchen abhängt, lässt sich dann der Schwerpunktsanteil der Matrixelemente a_{ik}^J abspalten. So erhält man Matrixelemente zu Ein-Teilchen-Zuständen in Relativkoordinaten, die noch auf besonders einfache Integrale (TALMI-Integrale) zurückgeführt werden können. Eine genaue Beschreibung des Verfahrens und weitere Literaturhinweise findet man in Ref.¹¹ und bei DTW⁴. Eine Tabelle der bei der Rechnung auftretenden Koeffizienten, die die Umrechnung von jj - in LS -Kopplung ermöglichen, findet sich im Anhang, da sie anscheinend bisher nicht veröffentlicht worden ist.

¹⁴ I. TALMI, Helv. Phys. Acta **25**, 185 [1952].

¹⁵ Die Einzelanteile der Matrixelemente werden auf Wunsch zugesandt.

¹⁶ A. E. LITHERLAND, M. J. L. YATES, B. M. HINDS u. D. ECCLES-HALL, Nucl. Phys. **44**, 220 [1963].

4. Ergebnisse und Diskussion

In Tab. 2 sind die Matrixelemente a_{ik}^J des Wechselwirkungspotentials V angegeben¹⁵. Die Energien der Zustände sind in Abb. 3 zusammen mit dem experimentellen Termschema und den Ergebnissen von DTW mit dem *hard core*-Potential aufgetragen. Der Grundzustand ist bei einer Energie von

$$E = BE(O^{18}) - BE(O^{16}) - 2[BE(O^{17}) - BE(O^{16})] \\ = -3,923 \text{ MeV}$$

eingetragen (BE = Bindungsenergie).

	Pot. 1	Pot. 2	Pot. 3	Pot. 4	Pot. 5
a_{11}^0	-1,713	-1,095	-0,631	-0,693	-1,670
a_{12}^0	-0,691	-0,251	-0,551	-0,041	-0,505
a_{13}^0	-1,399	-0,894	-3,106	-0,566	-1,363
a_{22}^0	-1,491	-1,090	-1,831	-1,293	-1,807
a_{23}^0	-0,564	-0,205	-0,450	-0,033	-0,412
a_{33}^0	-1,142	-0,730	0,637	-0,462	-1,113
a_{11}^1	0	0	-0,120	0	0
a_{12}^1	0	0	-0,185	0	0
a_{22}^1	0	0	-0,240	0	0
a_{11}^2	-0,555	-0,535	-0,838	-0,741	-0,772
a_{12}^2	-0,664	-0,389	-0,479	-0,311	-0,532
a_{13}^2	-0,392	-0,378	-0,400	-0,524	-0,546
a_{14}^2	0,543	0,318	0,557	0,254	0,434
a_{15}^2	-0,424	-0,409	-0,621	-0,566	-0,590
a_{22}^2	-1,217	-1,008	-0,981	-1,429	-1,423
a_{23}^2	-0,470	-0,275	-0,093	-0,220	-0,376
a_{24}^2	0,994	0,823	1,545	1,167	1,162
a_{25}^2	-0,508	-0,297	-0,815	-0,237	-0,406
a_{33}^2	-0,277	-0,268	-0,159	-0,371	-0,386
a_{34}^2	0,384	0,225	0,695	0,179	0,307
a_{35}^2	-0,300	-0,289	-0,805	-0,400	-0,417
a_{44}^2	-0,811	-0,672	-0,351	-0,952	-0,949
a_{45}^2	0,414	0,242	-0,124	0,194	0,332
a_{25}^3	-0,324	-0,312	-0,036	-0,432	-0,450
a_{11}^3	0	0	-0,188	0	0
a_{12}^3	0	0	-0,086	0	0
a_{22}^3	0	0	-0,316	0	0
a_{11}^4	-0,507	-0,348	-0,335	-0,471	-0,478
a_{12}^4	-1,015	-0,696	-1,029	-0,942	-0,956
a_{22}^4	-2,030	-1,392	-1,879	-1,884	-1,982

Tab. 2. Matrixelemente der Wechselwirkungs-Potentialen V (Energien in MeV).

Es soll zuerst untersucht werden, ob ein Vergleich der berechneten Werte, die sich auf Grund des Schalenmodells und der einfachen Störungsrechnung ergeben, mit den gemessenen überhaupt sinnvoll ist.

ENGELAND¹ hat die experimentellen Ergebnisse zusammengestellt, die gegen die Gültigkeit des hier verwendeten Modells von zwei Neutronen in einem mittleren Rumpfpotential sprechen. Erstens ist es nicht möglich, damit die Größenordnung der von LITHERLAND et al.¹⁶ bestimmten Übergangswahrscheinlichkeiten vom zweiten 0^+ -Zustand in den

unteren 2⁺-Zustand mit Hilfe eines durch Konfigurationsmischung entstandenen Zwei-Teilchen-Zustandes zu erklären. Ferner haben HEWKA, MIDDLETON und WIZA¹ mehrere neue Energieniveaus bestimmt (in Abb. 2 zwischen 5,09 MeV und 5,52 MeV), die ebenfalls mit keinem der üblichen Zwei-Teilchen-Potentiale erhalten werden können (siehe Abb. 3), wenn man das einfache Schalenmodell zugrunde legt.

Durch die zusätzliche Annahme der Anregung von zwei Protonen aus dem O¹⁶-Rumpf gelingt es ENGELAND, diese experimentellen Ergebnisse auch theoretisch zu erklären. Er verwendet dabei dasselbe *hard core*-Potential wie DTW. Es erscheint daher sinnvoller, die in der vorliegenden Arbeit berechneten Niveaus in erster Linie nicht mit dem Experiment, sondern mit den Ergebnissen von DTW zu vergleichen, weil in beiden Fällen dasselbe Modell zugrunde gelegt wird. Aus der Zusammensetzung der von ENGELAND berechneten Zustände erkennt man

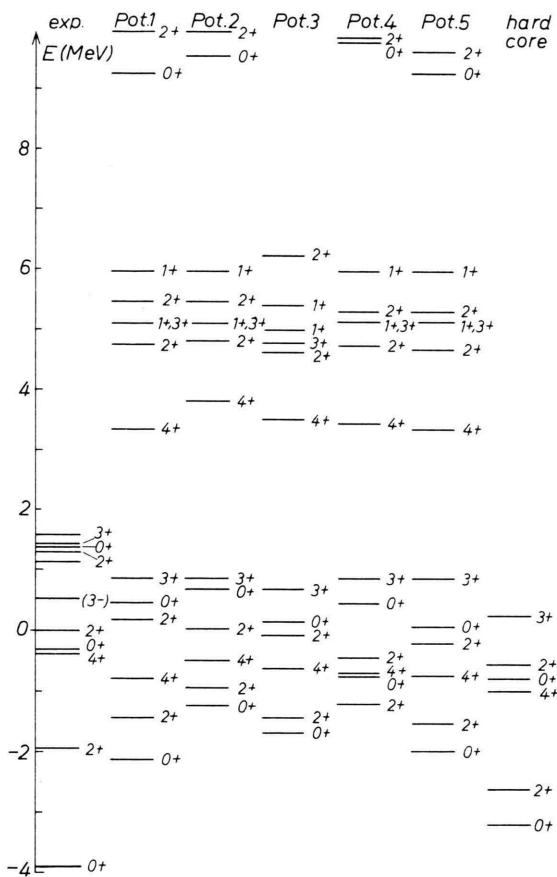


Abb. 3. Termschema von O¹⁸ mit den Potentialen 1 bis 5 im Vergleich mit dem experimentellen Termschema.

jedoch, daß auch bei Hinzunahme der Kernanregung außer beim zweitniedrigsten 0⁺-Zustand die Zwei-Teilchen-Anteile deutlich überwiegen. Somit darf man die hier erhaltenen Ergebnisse bis zu einem gewissen Grade auch mit dem Experiment vergleichen.

In Abb. 3 erkennt man, daß nur die Lagen des unteren 4⁺-Zustands und des zweitniedrigsten 2⁺-Zustands bei allen fünf geschwindigkeitsabhängigen Potentialen befriedigend mit den Ergebnissen von DTW übereinstimmen. Der untere 0⁺- und der untere 2⁺-Zustand liegen in allen Fällen im Vergleich mit DTW zu hoch. Auch die Lage des zweitniedrigsten 0⁺-Zustands weicht vom Ergebnis von DTW und vom Experiment dadurch ab, daß er nicht zwischen dem betreffenden 4⁺- und 2⁺-Zustand liegt, sondern systematisch darüber. Allerdings kann seine absolute Lage bei den Potentialen 3 und 5 im Vergleich mit dem experimentellen Spektrum nicht als völlig unbefriedigend bezeichnet werden.

Eine genaue Untersuchung der einzelnen Anteile der Matrixelemente zu $J=0$ und $J=2$ zeigt, daß gerade in den beiden unteren 0⁺-Zuständen und dem unteren 2⁺-Zustand die vom geschwindigkeitsabhängigen Teil des jeweiligen Potentials herrührenden Beiträge besonders groß sind. Um dies zu demonstrieren, sind in Abb. 4 für drei Potentiale die Lagen der Niveaus als Funktion eines Faktors f aufgetragen, mit dem die geschwindigkeitsabhängigen Anteile der Potentiale multipliziert wurden. Für $f=1$ sind diese Potentiale also angepaßt. In allen drei Fällen ergibt sich das gleiche Bild: verringert man den geschwindigkeitsabhängigen Anteil, so sinken vor allem die 0⁺-Zustände und in geringerem Maße der untere

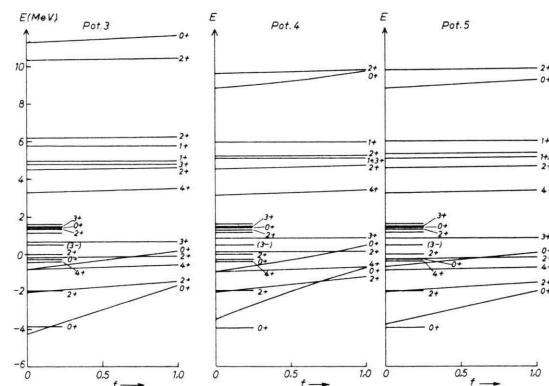


Abb. 4. Abhängigkeit der Niveaus vom geschwindigkeitsabhängigen Potentialanteil. Zum Vergleich experimentelles Termschema.

2^+ -Zustand ab, während sich die Lage der übrigen kaum ändert. Ferner erkennt man, daß die Übereinstimmung mit den experimentellen Niveaus bei fast verschwindendem geschwindigkeitsabhängigem Anteil am besten ist.

Es bleibt somit vorerst festzustellen, daß die Potentiale 1 bis 5 gerade diejenigen Zustände schlecht wiedergeben, in deren Berechnung der geschwindigkeitsabhängige Anteil am stärksten eingeht, solange man die Matrixelemente der Wechselwirkung mit Hilfe der ungestörten Wellenfunktionen gewinnt.

Dieses Ergebnis ist von vornherein nicht zu erwarten, wenn man zum Vergleich die relativ gute Übereinstimmung der Ergebnisse von DTW mit dem Experiment heranzieht. In anderen Fällen haben sich die geschwindigkeitsabhängigen und die *hard core*-Potentiale nämlich als durchaus gleichwertig erwiesen. So erhalten HERNDON et al.⁹ mit dem hier verwendeten Potential 5 bei der Berechnung der Bindungsenergie des α -Teilchens fast die gleichen unteren und oberen Schranken für die Energie wie mit dem *hard core*-Potential. Die Berechnung der Bindungsenergie pro Teilchen in unendlicher Kernmaterie ist von GREEN⁷ und DA PROVIDENCIA¹⁷ mit dem Potential 3 und von HARMS¹⁸ mit den Potentialen 1 und 2 durchgeführt worden und führt auf Ergebnisse der richtigen Größenordnung.

Es ist daher möglich, daß die Abweichung der Ergebnisse im vorliegenden Fall nicht in der verschiedenen Güte der Potentiale liegt, sondern daß sie durch die verwendete Störungsrechnung bedingt wird.

5. Modifizierung der Wellenfunktionen

Die beträchtliche Änderung der Wellenfunktionen zum Relativdrehimpuls Null beim *hard core*-Potential (siehe DTW) läßt vermuten, daß diese Änderung auch bei geschwindigkeitsabhängigen Potentialen eine Rolle spielt. Die dazu notwendige Rechnung wurde nach der BETHE-GOLDSTONE-Theorie vorgenommen. Diese Rechnung verläuft genau wie bei DTW und wird daher hier nicht näher erläutert¹⁹. Die SCHRÖDINGER-Gleichung (45) bei DTW wird hier ebenfalls numerisch für den Relativdrehimpuls Null gelöst. Die Wellenfunktionen zu höheren Drehimpulsen werden als ungestört angenommen.

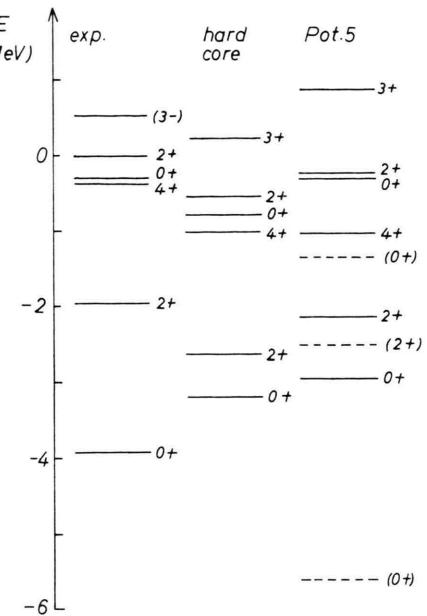


Abb. 5. Termschema von O^{18} mit Potential 5 unter Berücksichtigung der Störung der Wellenfunktionen (gestrichelt: nur eine Relativwellenfunktion).

DTW nehmen ferner an, daß nur die Störung der Wellenfunktion zur niedrigsten Radialquantenzahl n berücksichtigt werden müsse. Diese Annahme ist hier nicht gerechtfertigt, wie man aus der Abb. 5 erkennt. Dort sind gestrichelt die Lagen der Niveaus eingezeichnet, die sich mit dem Potential 5 bei diesem Vorgehen ergeben würden. Die ausgezogenen Niveaus ergeben sich, wenn man die Störung aller drei Wellenfunktionen zum Relativdrehimpuls Null einbezieht. Der mit dem Ergebnis von DTW vergleichbare Energiewert I_0 hat hier den Wert $I_0 = -7,677$ MeV (DTW: $I_0 = -8,323$ MeV).

Es scheint somit möglich zu sein, die geschwindigkeitsabhängigen Potentiale mit ebensoviel Erfolg anzuwenden wie das *hard core*-Potential. Allerdings ist es dazu wahrscheinlich unerlässlich, die Modifizierung der Wellenfunktionen zu berücksichtigen, so daß die Vereinfachung der Rechnung durch die Verwendung der ungestörten Wellenfunktionen aufgegeben werden muß.

Herrn Prof. Dr. G. LÜDERS danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise. Herrn Dr. U. HARRMS und Herrn Dr. S. SEYFFERTH danke ich für die nützlichen Diskussionen zu diesem

¹⁷ J. DA PROVIDENCIA, Nucl. Phys. **40**, 321 [1963].

¹⁸ U. HARMS, private Mitteilung.

¹⁹ Siehe auch: I. TALMI, Erratum, Ann. Phys. **19**, 350 [1962].

Thema. Dank gebührt ferner der Aerodynamischen Versuchsanstalt e. V. in Göttingen und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Möglichkeit, die numerischen Rechnungen zu dieser Arbeit auf der IBM 7040 in der Aerodynamischen Versuchsanstalt durchführen zu können.

$$\begin{aligned} \text{Singulettzustände} \quad S &= O, \quad J = L, \\ N &= [2(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)]^{1/2} \end{aligned}$$

j_1	j_2	U
$l_1 + 1/2$	$l_2 + 1/2$	$N^{-1}[(l_1 + l_2 + J + 2)(l_1 + l_2 - J + 1)]^{1/2}$
$l_1 + 1/2$	$l_2 - 1/2$	$N^{-1}[(l_2 - l_1 + J)(l_1 - l_2 + J + 1)]^{1/2}$
$l_1 - 1/2$	$l_2 + 1/2$	$-N^{-1}[(l_1 - l_2 + J)(l_2 - l_1 + J + 1)]^{1/2}$
$l_1 - 1/2$	$l_2 - 1/2$	$N^{-1}[(l_1 + l_2 + J + 1)(l_1 + l_2 - J)]^{1/2}$

j_1	j_2	$N \cdot U$
$l_1 + 1/2$	$l_2 + 1/2$	$-[(l_1 + l_2 - J)(l_1 + l_2 - J + 1)(l_1 - l_2 + J + 1)(l_2 - l_1 + J + 1)]^{1/2}$
$l_1 + 1/2$	$l_2 - 1/2$	$-[(l_1 + l_2 - J)(l_2 - l_1 + J)(l_2 - l_1 + J + 1)(l_1 + l_2 + J + 2)]^{1/2}$
$l_1 - 1/2$	$l_2 + 1/2$	$[(l_1 + l_2 - J)(l_1 - l_2 + J)(l_1 - l_2 + J + 1)(l_1 + l_2 + J + 2)]^{1/2}$
$l_1 - 1/2$	$l_2 - 1/2$	$[(l_1 + l_2 + J + 1)(l_1 + l_2 + J + 2)(l_1 - l_2 + J + 1)(l_2 - l_1 + J + 1)]^{1/2}$

$J = L$	$N = [2J(J + 1)(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)]^{1/2}$
j_1	j_2
$l_1 + 1/2$	$l_2 + 1/2$
$l_1 + 1/2$	$l_2 - 1/2$
$l_1 - 1/2$	$l_2 + 1/2$
$l_1 - 1/2$	$l_2 - 1/2$

$J = L + 1$	$N = [2J(2J + 1)(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)]^{1/2}$
j_1	j_2
$l_1 + 1/2$	$l_2 + 1/2$
$l_1 + 1/2$	$l_2 - 1/2$
$l_1 - 1/2$	$l_2 + 1/2$
$l_1 - 1/2$	$l_2 - 1/2$

Anhang

In der Tab. 3 werden die Umkopplungskoeffizienten $U = ((l_1 l_2) L, (s_1 s_2) S, J \mid (j_1 j_2) J)$ für $s_1 = s_2 = 1/2$ in geschlossener Form aufgeführt. Man benötigt sie beim Übergang von LS- zu jj-Kopplung beim Zwei-Teilchen-Problem.

Tab. 3. Umkopplungskoeffizienten für den Übergang LS- jj-Kopplung.